Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Чирикова Лилия Ивановна
Должность: Директор филиала
Дата подписания: 17.11.2026 15:24:28
Уникальный программный ключ:
750e77999bb0631a45cbf7b4a579c1095bcef032814fee919138f73a4ce0cad5

Приложение
к ППССЗ по специальности
13.02.07 Электроснабжение

КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

ОП.08 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

для специальности **13.02.07 Электроснабжение**

Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств

1.1. Область применения контрольно-оценочных материалов

Результатом освоения дисциплины Математические методы решения прикладных профессиональных задач является формирование знаний, умений, общекультурных и профессиональных компетенций.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине является – дифференцированный зачет (3 семестр).

Виды проведения текущего контроля: письменный, устный, комбинированный опрос.

1.2.Требования к результатам освоения учебной дисциплины.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен

уметь:

У1 - использовать методы линейной алгебры;

У2 - решать основные прикладные задачи численными методами;

У3 - применять математические методы для решения профессиональных задач;

знать:

З1 - основные понятия и методы основ линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;

З2 - основные численные методы решения прикладных задач

1.3. Компетенции

В результате освоения дисциплины у обучающихся формируются общекультурные и профессиональные **компетенции:**

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ПК 2.3 Оформлять техническую документацию по организации обслуживания и ремонта оборудования подстанций и электрических сетей.

2. Модели контролируемых компетенций

Таблица 2.1. Модели контролируемых компетенций

Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины	Требования для освоения дисциплины
ОК 01 . Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности	**Знать:** З1 - актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить З2структура плана для решения задач, алгоритмы

применительно к различным контекстам	выполнения работ в профессиональной и смежных областях З 3основные источники информации и ресурсы для решения задач и/или проблем в профессиональном и/или социальном контексте З 4методы работы в профессиональной и смежных сферах З 5порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности
	Уметь: У1 распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте, анализировать и выделять её составные части У2определять этапы решения задачи, составлять план действия, реализовывать составленный план, определять необходимые ресурсы У3выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы У4владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах У5оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)
ОК 02, Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности	**Знать:** З1 номенклатура информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности З2приемы структурирования информации З3формат оформления результатов поиска информации З4современные средства и устройства информатизации, порядок их применения З5программное обеспечение в профессиональной деятельности, в том числе цифровые средства
	Уметь: У1 определять задачи для поиска информации, планировать процесс поиска, выбирать необходимые источники информации У2выделять наиболее значимое в перечне информации, структурировать получаемую информацию, оформлять результаты поиска У3оценивать практическую значимость результатов поиска У4применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач У5использовать современное программное обеспечение в профессиональной деятельности У6использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач
ОК 04, Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде	**Знать:** З1психологические основы деятельности коллектива З2психологические особенности личности

	Уметь: У1организовывать работу коллектива и команды У2взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности
ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста	**Знать:** **З1**правила оформления документов З2правила построения устных сообщений З3особенности социального и культурного контекста
	Уметь: У1грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке У2проявлять толерантность в рабочем коллективе
ПК 2.3 Оформлять техническую документацию по организации обслуживания и ремонта оборудования подстанций и электрических сетей.	**Знать:** З1требования нормативной, конструкторской, производственно-технологической и технической документации З2порядок вывода оборудования подстанции в ремонт и оформления нарядов-допусков для выполнения на них ремонтных и других работ З3нормативные, методические документы, регламентирующие деятельность по ремонту оборудования подстанции З4технология ремонта, наладки и испытаний обслуживаемого оборудования подстанции сроки действия, физические объемы нового строительства и реконструкции электрических сетей и линий электропередачи подразделения
	Уметь: У1рассчитывать (определять) потребность в материалах, запасных запчастях для ремонта оборудования подстанций электрических сетей

2.2. Контроль и оценка освоения дисциплины по разделам (темам)

Элемент дисциплины		Текущая аттестация (текущий контроль успеваемости)	
		Наименование оценочного средства	**Результаты освоения (знания, умения, компетенции)**
Раздел 1. Основы линейной алгебры.			
Тема 1.1	**Роль математики всовременном мире. Матрицы и определители.**	НС; ПЗ; ВСР	ОК1, ОК2, ОК4,ОК5, ПК 2.3 У1, У2, У3, З1, З2;
Тема 1.2	**Системы линейных алгебраических уравнений**	НС	ОК1, ОК2, ОК4,ОК5, ПК 2.3, У1, У2, У3, З1, З2;
Раздел 2. Основы теории комплексных чисел.			
Тема 2.1	**Основные свойства комплексных чисел**	НС; ПЗ; ВСР	ОК1, ОК2, ОК4,ОК5, ПК 2.3, У1, У2, У3, З1, З2;
Раздел 3. Основы векторной алгебры			
Тема 3.1	**Векторы на плоскости.**	НС; ПЗ; ВСР	ОК1, ОК2, ОК4,ОК5, ПК 2.3, У1, У2, У3, З1, З2
Раздел 4. Основы математического анализа			
Тема 4.1	**Функция одной независимой переменной и ее характеристики**	НС; ПЗ	ОК1, ОК2, ОК4,ОК5, ПК 2.3, У1, У2, У3, З1, З2;
Тема 4.2	**Дифференциальное и интегральное исчисления одной переменной**	НС	ОК1, ОК2, ОК4,ОК5, ПК 2.3, У1, У2, У3, З1, З2;
Промежуточная аттестация по дисциплине Дифференцированный зачет (3 семестр)			

Принятые сокращения, З – зачет, , Э – экзамен , НС – накопительная система оценивания, РЗ – решение задач, ПР – проверочная работа, ПР-практическое работа; ВСР – выполнение внеаудиторной самостоятельной работы (домашние работы и другие виды работ или заданий). Для результатов освоения указывают только коды знаний, умений и компетенций

3. Оценка освоения учебной дисциплины

3.1. Текущая аттестация студентов.

Критерии оценки

«отлично» - студент полно раскрыл содержание материала в объеме, предусмотренном программой и учебником, изложил материал грамотным языком в определенной логической последовательности, точно используя математическую терминологию и символику; правильно выполнил рисунки, чертежи, графики, сопутствующие ответу; показал умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, применять их в новой ситуации при выполнении практического задания; продемонстрировал сформированность и устойчивость используемых при отработке умений и навыков, усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов;

отвечал самостоятельно без наводящих вопросов учителя. Возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые студент легко исправил по замечанию преподавателя

«хорошо» - ответ удовлетворяет в основном требованиям на оценку «5», но при том имеет один из недостатков: в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие математическое содержание ответа; допущены один – два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию преподавателя; допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках

«удовлетворительно» - неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного; имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании математической терминологии, чертежах, выкладках, исправленные после нескольких наводящих вопросов

«неудовлетворительно» - ставится, когда у студента имеются отдельные представления об изученном материале, но все же большая часть материала не усвоена

3.2. Самостоятельная работа

Критерии оценки

«отлично»- задание выполнено в полном объёме на 100%, материал полностью соответствует теме, изложение чёткое, ответы на вопросы исчерпывающие.

«хорошо»- задание выполнено на 70%, изложение неточное, студент затрудняется при ответах на вопросы.

«удовлетворительно»- задание выполнено на 40-50%, изложение материала вызывает затруднение, ответы на вопросы затруднённые или отсутствуют.

«неудовлетворительно»- задание не выполнено в полном объёме.

3.3. Практические занятия

Критерии оценки

«отлично» - работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала)

«хорошо» - работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки)

«удовлетворительно» - допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме

«неудовлетворительно» - допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

3.4. Промежуточная аттестация студентов

«отлично» - ставится при правильном решении задач и правильном ответе на два вопроса из разных разделов, а так же при ответе на дополнительные вопросы;

«хорошо» - ставится при правильном решении задач и правильном ответе на два вопроса без дополнительных вопросов;

«удовлетворительно» - ставится при правильном ответе на вопрос и правильном решении задачи;

«неудовлетворительно»- при правильном решении задачи и отсутствии ответа на вопросы.

4. Текущая аттестация студентов.

Текущая аттестация по учебной дисциплине Математические методы решения прикладных профессиональных задач проводится в форме контрольных мероприятий (*устный опрос, контрольные работы и пр.*), оценивание фактических результатов обучения студентов осуществляется преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

– учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);

– степень усвоения теоретических знаний;

– уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;

– результаты самостоятельной работы.

Активность студента на занятиях оценивается на основе выполненных студентом работ и заданий, предусмотренных данной рабочей программой учебной дисциплины.

4.1. Задания для текущей аттестации.

Раздел. Комплексные числа

Тема Решение систем уравнений Гаусса.

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

2. Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы

3.Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

4.Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы.

5.Решение систем линейных уравнений матричным способом (метод обратной матрицы)

6.Применение различных методов решения систем линейных уравнений в задачах в области профессиональной деятельности

Тема Основные формы комплексных чисел

Вопросы для устных (письменных) опросов:

1. Алгебраическая форма комплексного числа
2. Тригонометрическая форма комплексного числа
3. Показательная форма комплексного числа
4. Модуль комплексного числа
5. Сопряженные числа
6. Аргумент комплексного числа
7. Степень числа ***i***
8. Геометрический смысл комплексного числа

Тема Действия над комплексными числами

Вопросы для устных (письменных) опросов:

1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме
2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
3. Действия над комплексными числами в показательной форме

Раздел. Основы математического анализа
Тема Дифференциальное и интегральное исчисление
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Предел функции в точке
2. Производная функция в точке
3. Основные формулы дифференцирования
4. Производная сложной функции
5. Геометрический и физический смысл производной
6. Неопределенный интеграл
7. Таблица интегралов
8. Определенный интеграл

Тема Дифференциальные уравнения
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Дифференциальное уравнение
2. Общее и частное решение дифференциального уравнения
3. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными
4. Линейное дифференциальное уравнение 1 порядка
5. Однородное дифференциальное уравнение 1 порядка
6. Линейное дифференциальное уравнение 2 порядка

5. Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная работа включает в себя подготовку докладов с презентацией, работа с дополнительной литературой и ответы на вопросы.

Раздел. Комплексные числа
Тема Решение систем уравнений Гаусса.

Выполнение тренировочных заданий: «Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы. Решение систем линейных уравнений матричным способом (метод обратной матрицы) Применение различных методов решения систем линейных уравнений в задачах в области профессиональной деятельности»

Тема Основные формы комплексных чисел
Темы докладов или презентаций:
«Комплексные числа», «Основные формы комплексных чисел: алгебраическая, тригонометрическая, показательная», «Геометрическая интерпретация комплексных чисел»..

Тема Действия над комплексными числами
Выполнение тренировочных и зачетных заданий по теме: « Прикладное применение комплексных чисел при анализе процессов в электрических цепях устройств ЖАТ»

Раздел Основы математического анализа
Тема Дифференциальное и интегральное исчисление
Темы докладов или презентаций:
«Развитие интегрального исчисления», «Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной»,
«Вычисления площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла»
Систематическая проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы. Поиск, анализ и оценка информации (профессиональные базы данных, ресурсы сети Интернет) по содержанию учебного материала и определению профессионально значимых задач. Подготовка сообщений или презентаций

Тема Дифференциальные уравнения
Темы докладов или презентаций:
«Дифференциальные уравнения первого и второго порядка», «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными», «Однородные уравнения первого порядка», «Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами», «Применение обыкновенных дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач».

6. Задания на практические занятия

Практическое занятие № 1

Тема 1.1 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Тема: Система *m* линейных уравнений с *n* переменными. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: отработать навыки решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Материальное обеспечение: практическая работа, программное обеспечение.

Общие теоретические положения

Наиболее распространенным точным методом решения системы линейных уравнений является метод Гаусса. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему.

Пусть дана произвольная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \quad (1)$$

Будем производить над ней элементарные преобразования. Для этого выпишем матрицу из коэффициентов при неизвестных системы (1) с добавлением столбца свободных членов, другими словами **расширенную матрицу** $\bar{A}$ для системы (1):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix} \quad (2).$$

$(a_{s1} \quad a_{s2} \quad \dots \quad a_{sn} \quad b_s)$

Предположим, что с помощью таких преобразований удалось привести матрицу $\tilde{A}$ к виду:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} & c_2 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & b_{rr} & \dots & b_{rn} & c_r \end{pmatrix} \quad (r \le n), \quad (3),$$

где все диагональные элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже диагональных, равны нулю. Матрице (3) соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1r}x_r + \dots + b_{1n}x_n = c_1, \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2r}x_r + \dots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{rr}x_r + \dots + b_{rn}x_n = c_r, \end{cases} \quad (4),$$

которая получается из системы (1) с помощью некоторого числа элементарных преобразований и, следовательно, равносильна системе (1). Если в системе (4) $r=n$, то из последнего уравнения , имеющего вид $b_{nn}x_n=c_n$(где $b_{nn}\neq 0$), находим единственное значение x_n, из предпоследнего уравнения – значение x_{n-1} (поскольку x_n уже известно) и т.д., наконец, из первого уравнения – значение x_1. Итак, в случае)$r=n$ система имеет единственное решение. Если же $r<n$, то система (4) легко приводится к системе вида:

$$\begin{cases} x_1=\alpha_{1,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{1n}x_n+\beta_1, \\ x_2=\alpha_{2,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{2n}x_n+\beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r=\alpha_{r,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{rn}x_n+\beta_r. \end{cases} \qquad r<n, \ (5),$$

которая и является по существу **общим решением** системы (1).

Неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ называются **свободными**. Из системы (5) можно будет найти значения $x_1,\ldots, x_r$.

Приведение матрицы $\bar{A}$ к виду (3) возможно только в том случае, когда исходная система уравнений (1) совместна. Если же система (1) несовместна, то такое приведение невозможно. Это обстоятельство выражается в том, что в процессе преобразований матрицы $\bar{A}$ в ней появляется строка, в которой все элементы равны нулю, кроме последнего. Такая строка соответствует уравнению вида:

$$0*x_1+0*x_2+\ldots+0*x_n=b,$$

которому не удовлетворяют никакие значения неизвестных, так как $b\neq 0$. В этом случае система несовместна.

В процессе приведения системы (1) к ступенчатому виду могут получаться уравнения вида 0=0. Их можно отбрасывать, так как это приводит к системе уравнений, эквивалентных прежней.

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над её строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразований матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Решим следующую систему уравнений с 4-мя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11, \\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40, \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных с добавлением столбца свободных членов.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix}$$

Произведём анализ строк расширенной матрицы:

– к элементам 2-ой строки прибавим элементы 1-ой, делённые на (-2);

– из 3-ей строки вычтем 1-ю строку;

– к 4-ой строке прибавим 1-ю, умноженную на (-3/2).

В качестве вычислительного средства воспользуемся инструментами программы *табличный редактор*.

1. Включите компьютер.
2. Подождите пока загрузится операционная система *Windows*, после чего *откройте окно табличного редактора*.
3. *Заполните ячейки* таблицы значениями расширенной матрицы (рисунок 1)

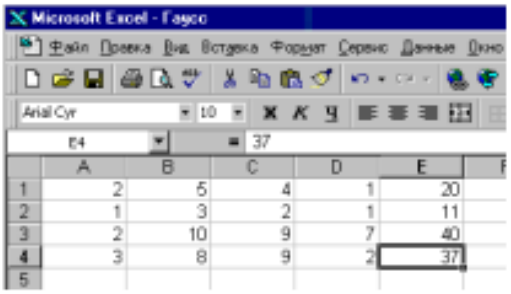


Рисунок 1

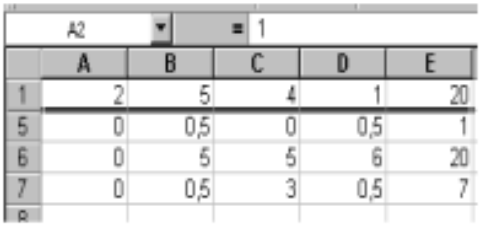
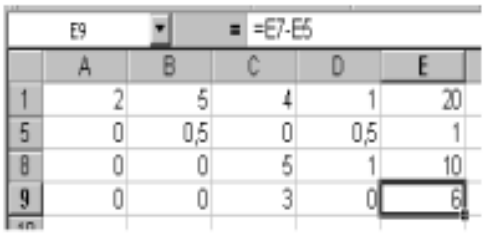


Рисунок 2

4. Для выполнения выбранного словесного алгоритма производим следующие действия.
   - *Активизируйте ячейку* A5 и с клавиатуры занесите в неё формулу вида =A2+A1/(-2), после чего *автозаполнением* занесите численные результаты в ячейки B5÷E5;
   - В ячейке A6 разместим результат вычитания 1-ой строки из 3-ей, и снова, пользуясь *автозаполнением*, заполним ячейки B6÷E6;
   - в ячейке A7 запишем формулу вида =A4+A1*(-3/2) и *автозаполнением* занесём численные результаты в ячейки B7÷E7.
   - Далее *скроем* 2, 3 и 4 – строки, которые нам уже не нужны. Для этого воспользуемся пунктом меню ФОРМАТ→СТРОКА→СКРЫТЬ. Результат показан на рисунок 2.
5. Снова произведём анализ строк получившихся в результате элементарных преобразований матрицы, чтобы привести её к треугольному виду.
   - К 6-ой строке прибавим 5-ю, умноженную на число (-10);
   - из 7-ой строки вычтем 5-ю.

Записанный алгоритм реализуем в ячейках A8, A9, после чего *скроем* 6 и 7 – строки (см. рисунок 3).



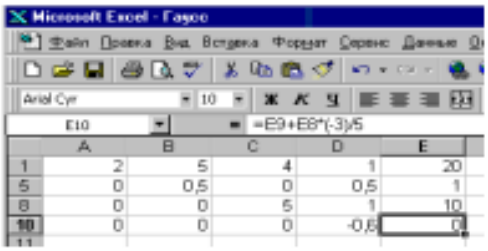


Рисунок 3 Рисунок 4

6. И последнее, что нужно сделать, чтобы привести матрицу к треугольному виду – это к 9-ой строке прибавить 8-ю, умноженную на (-3/5), после чего *скрыть* 9-ю строку (рисунок 4).

Как вы можете видеть, элементы получившейся матрицы находятся в 1, 5, 8 и 10 строках, при этом ранг получившейся матрицы **r** = 4, следовательно, данная система уравнений имеет единственное решение. Выпишем получившуюся систему:

$$2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20,$$
$$0,5x_2+0,5x_4=1,$$
$$5x_3+x_4=10,$$
$$-0,6x_4=0.$$

Из последнего уравнения легко находим $x_4=0$; из 3-го уравнения находим $x_3=2$; из 2-го – $x_2=2$ и из 1-го – $x_1=1$ соответственно.

Задание к работе:

Методом Гаусса решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2, & x_1=-0{,}4 \\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=6, & x_2=-1{,}2 \\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3, & x_3=3{,}4 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0. & x_4=1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3+2x_4=3, & x_1=\frac{1}{2}, \\ 6x_1+9x_2-2x_3-x_4=-4, & x_2=-\frac{2}{3}, \\ 10x_1+3x_2-3x_3-2x_4=3, & x_3=2, \\ 8x_1+6x_2+x_3+3x_4=-7. & x_4=-3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x_1+5x_2-2x_3+4x_4=-4, & x_1=\frac{2}{3}, \\ 9x_1-x_2+4x_3-x_4=13, & x_2=-1, \\ 3x_1+4x_2+2x_3-2x_4=1, & x_3=\frac{3}{2}, \\ 3x_1-9x_2+2x_4=11. & x_4=0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3+5x_4=7, & x_1=2, \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4=3, & x_2=1, \\ 3x_1-x_2+2x_3=-1, & x_3=-3, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=-7. & x_4=1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1-x_2-6x_3+3x_4=-1, & x_1=-3, \\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4=-32, & x_2=0, \\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4=5, & x_3=-\frac{1}{2}, \\ x_1-x_2+2x_3-6x_4=-8. & x_4=\frac{2}{3}. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1, & x_1=\frac{2}{3}, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=2, & x_2=-\frac{43}{18}, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=-5, & x_3=\frac{13}{9}, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=11. & x_4=-\frac{7}{18}. \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Применять метод Гаусса можно к любой системе линейных уравнений?

2. Можно получить множество решений, при решении систем линейных уравнений методом Гаусса?

Практическое занятие № 2

Тема: «Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы. Решение систем линейных уравнений матричным способом (метод обратной матрицы) Применение различных методов решения систем линейных уравнений в задачах в области профессиональной деятельности»

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с помощью обратной матрицы (иногда этот способ именуют ещё матричным методом или методом обратной матрицы) требует предварительного ознакомления с таким понятием как матричная форма записи СЛАУ. Метод обратной матрицы предназначен для решения тех систем линейных алгебраических уравнений, у которых определитель матрицы системы отличен от нуля. Естественно, при этом подразумевается, что матрица системы квадратна (понятие определителя существует только для квадратных матриц). Суть метода обратной матрицы можно выразить в трёх пунктах:

1. Записать три матрицы: матрицу системы A, матрицу неизвестных X, матрицу свободных членов B.
2. Найти обратную матрицу A^{-1}.
3. Используя равенство $X = A^{-1} \cdot B$ получить решение заданной СЛАУ.

Почему $X = A^{-1} \cdot B$? показать\скрыть

Перед переходом к чтению примеров рекомендую ознакомиться с методами вычисления обратных матриц, изложенными здесь.

Пример №1

Решить СЛАУ $\begin{cases} -5x_1 + 7x_2 = 29; \\ 9x_1 + 8x_2 = -11. \end{cases}$ с помощью обратной матрицы.

Решение

Запишем матрицу системы A, матрицу свободных членов B и матрицу неизвестных X.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 29 \\ -11 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу к матрице системы, т.е. вычислим A^{-1}. В примере № 2 на странице, посвящённой нахождению обратных матриц, обратная матрица была уже найдена. Воспользуемся готовым результатом и запишем A^{-1}:

$$A^{-1} = -\frac{1}{103} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь подставим все три матрицы (X, A^{-1}, B) в равенство $X = A^{-1} \cdot B$. Затем выполним умножение матриц в правой части данного равенства.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{103} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ -11 \end{pmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{103} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 29 + (-7) \cdot (-11) \\ -9 \cdot 29 + (-5) \cdot (-11) \end{pmatrix} = -\frac{1}{103} \cdot \begin{pmatrix} 309 \\ -206 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, мы получили равенство $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Из этого равенства имеем: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Пример №2

Решить СЛАУ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -1; \\ -4x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$ методом обратной матрицы.

Решение

Запишем матрицу системы A, матрицу свободных членов B и матрицу неизвестных X.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 6\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Теперь настал черёд найти обратную матрицу к матрице системы, т.е. найти A^{-1}. В примере № 3 на странице, посвящённой нахождению обратных матриц, обратная матрица была уже найдена. Воспользуемся готовым результатом и запишем A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}6 & -5 & 1\\ 8 & 2 & -16\\ -12 & -3 & 37\end{pmatrix}.$$

Теперь подставим все три матрицы (X, A^{-1}, B) в равенство $X=A^{-1}\cdot B$, после чего выполним умножение матриц в правой части данного равенства.

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}6 & -5 & 1\\ 8 & 2 & -16\\ -12 & -3 & 37\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 6\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}6\cdot(-1)+(-5)\cdot 0+1\cdot 6\\ 8\cdot(-1)+2\cdot 0+(-16)\cdot 6\\ -12\cdot(-1)+(-3)\cdot 0+37\cdot 6\end{pmatrix}=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -104\\ 234\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -4\\ 9\end{pmatrix}$$

Итак, мы получили равенство $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -4\\ 9\end{pmatrix}$. Из этого равенства имеем: $x_1=0$, $x_2=-4$, $x_3=9$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-4$, $x_3=9$.

Естественно, что решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы без применения специальных программ вроде Mathcad возможно лишь при сравнительно небольшом количестве переменных.

Если СЛАУ содержит четыре и более переменных, то гораздо удобнее в таком случае применить метод Гаусса или метод Гаусса-Жордана.

Тема 1.3 Действия над комплексными числами
Практическое занятие № 3,4

Тема занятия: Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной и обратно.

Цель: расширение и закрепление теоретических знаний

1. Вычислите:
   а) $\dfrac{1+3i}{-2+i}\cdot(-2i)+1$;
   б) $\left(\dfrac{i^{16}+3}{i^{6}+3}\right)^{5}$.
2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа z:
   z = (–5+i) (–5–i)
3. Выполните умножение, используя тригонометрическую форму комплексного числа:
   $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{6}+\dfrac{i\sqrt{6}}{6}\right)$.

4. Возведите в степень по формуле Муавра и запишите результат в алгебраической форме: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9$.

5. Извлеките корень: $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$.

6. Изобразите на комплексной области множество всех точек z,удовлетворяющих условию:
$|z-1+i| \geq 1$, $\mathrm{Re}\, z > 1$, $\mathrm{Im}\, z \leq -1$.

7. Выполните действия в показательной форме:
$$8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right):\left(4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Раздел. Основы математического анализа
Тема Дифференциальное и интегральное исчисление
Практическое занятие

Пределы. Непрерывность функций. Производная, геометрический смысл. Исследование функций

1.Вычислить производную функций:

а) $y=\left(3+2x^2\right)^4$; б) $y=ln\ cos\ x^2$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$;

г) $y=tg\frac{x}{1+x}$; д) $y=\sin\left(x^2+2\right)$ е) $y=4^{\cos x}\cdot arctg\ 2x$.

а) $y=ctg^2x+2\ln(\sin x)$; б) $y=arctg\sqrt{9x^2-1}$;

в) $y=3^{\cos^2 x-2\cos x}$; г) $y=\ln\sin\frac{x}{2}$.

Решение. а) Применим правила дифференцирования суммы и сложной функции:

$$y'=\left(ctg^2x\right)'+2(\ln(\sin x))'=2ctgx\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)+2\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=2ctgx\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-2ctg^3x.$$

б) $$\left(arctg\sqrt{9x^2-1}\right)'=\frac{1}{1+\left(9x^2-1\right)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{9x^2-1}}\cdot 9\cdot 2x=\frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}.$$

в) $$y'=3^{\cos^2 x-2\cos x}\cdot\ln 3\cdot\left(\cos^2 x-2\cos x\right)'=$$
$$=3^{\cos^2 x-2\cos x}\cdot\ln 3\left(-2\cos x\cdot\sin x+2\sin x\right)=3^{\cos^2 x-2\cos x}\cdot\ln 3\cdot 2\sin x(1-\cos x).$$

г) $$y'=\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}ctg\frac{x}{2}.$$

2. Вычислить производные функций:

Решение. а) Функцию $y=(3+2x^2)^4$ можно записать как сложную функцию в виде $y=u^4$, где $u=3+2x^2$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем $y'=y'_u\cdot u'_x=4u^3\cdot u_x'=4(3+2x^2)^3\cdot(3+2x^2)'=16(3+2x^2)^3\cdot x.$

б) $y'=\frac{1}{\cos x^2}\cdot(\cos x^2)'=\frac{1}{\cos x^2}\cdot(-\sin x^2)\cdot(x^2)'=-\frac{\sin x^2}{\cos x^2}\cdot 2x=-tg\,x^2\cdot 2x.$

в) Данную функцию можно представить в виде $y=\arcsin u$, где $u=\sqrt{1-3x}$.

Тогда $y'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u_x'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-3x)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-3x}}\cdot(-3)=\frac{-3}{2\sqrt{3x(1-3x)}}.$

г) $y'=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x+1}}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2\cos^2\frac{x}{x+1}}.$

д) $y'=\cos(x^2+2)\cdot(x^2+2)'=2x\cos(x^2+2)$

е) $y'=(4^{\cos x})'\cdot arctg\,2x+4^{\cos x}\cdot(arctg\,2x)'=$

$=4^{\cos x}\,ln\,4\cdot(\cos x)'\cdot arctg\,2x+4^{\cos x}\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)'=$

$=-4^{\cos x}\cdot ln\,4\cdot\sin x\cdot arctg\,2x+4^{\cos x}\cdot\frac{2}{1+4x^2}.$

Практическое занятие 8

Вычисление простейших определенных интегралов.

Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной.

Вычисления площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла

Тема занятия: Нахождение производной сложной функции. Интегрирование функций. Метод замены переменной. Интегрирование по частям. Вычисление определённого интеграла. Приложение определенного интеграла к решению различных прикладных задач.

Цель: закрепление умений нахождения производной сложной функции; закрепление умений интегрирования функций методом замены переменной и методом интегрирования по частям; закрепление умений вычисления определённого интеграла.

1. Найти производную функции:

1) $y=4x+6\sqrt[3]{x}$; 2) $y=(x^2-1)(x^2-3)$;

3) $y=\frac{\sin x}{1+tgx}$; 4) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$;

2. Найти интегралы, используя основные свойства интеграла:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$ 2) $\int_1^4(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

3. Найти интегралы, используя метод замены переменной:

1) $\int e^{x+x^2}(1+2x)dx$ 2) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{32xdx}{(x^2+1)^5}$

4. Найти интеграл, используя метод интегрирования по частям:

1) $\int \ln x dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx$

5. Найти интеграл: $\int \sin^3 x dx$

Тема 3.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 9

Тема занятия: Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Цель: закрепление умений решения дифференциальных уравнений

Проинтегрировать следующие уравнения

$1.(1+y^2)dx+xydy=0$	$2.xy(1+x^2)y'=1+y^2$
$3.(1+y^2)dx=xdy$	$4.(x+1)dy+xydx=0$
$5.\sqrt{y^2+1}dx=xydy$	$6.2x^2yy'+y^2=2$
$7.y'-xy^2=2xy$	$8.y'-y=2x-3$
$9.y'=\frac{y}{x^2}$	$10.(1+y^3)xdx-(1+x^2)y^2dy$

Найти частные решения удовлетворяющие заданным начальным условиям.

. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, y = 1 при x = 0

2. $y'ctgx+y=2$, y = - 1 при x = 0

3. $y'=3\sqrt[3]{x^2}$, y = 2 при x = 0

4. $xy'+y=y^2$, y = 0,5 при x = 1

5. $(x+2y)y'=1$, y = - 1 при x = 0

6. $\frac{xdx}{1+y}-\frac{ydy}{1+x}=0$, y = 1 при x = 1

7. $xy'=y\ln y$, y = 1 при x = 0

8. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$, y = 1 при x = 0

9. $2\sqrt{y}dx=dy$, y = 1 при x = 0

1. Решить уравнение: $(1+\cos x)yy'=(1+y^2)\sin x$.

2. Решить уравнение: $y''-y=x+\cos x$.

3. Решить задачу Коши: $y''-9y=0, y(0)=5, y'(0)=2$.

7. Промежуточная аттестация.

Промежуточная аттестация по учебной дисциплине Математические методы решения прикладных профессиональных задач проводится в форме дифференцированного зачета (3 семестр).

К промежуточной аттестации по учебной дисциплине допускаются все студенты. При явке на промежуточную аттестацию студентам необходимо иметь зачетную книжку. По результатам всех видов оценочной деятельности студенту выставляется отметка по учебной дисциплине. Шкала оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Студенты, не прошедшие промежуточную аттестацию в установленное время по уважительной причине, подтвержденной документально соответствующим документом, сдают её индивидуально, в установленные сроки .

Вопросы для зачета (3 семестр)

Вопросы для проверки уровня обученности «ЗНАТЬ»

1. Определение комплексных чисел. Основные формы комплексных чисел. Геометрическая интерпретация комплексных чисел
2. Действия с комплексными числами, представленными в различных формах. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно
3. Функции одной независимой переменной. Пределы. Непрерывность функций
4. Производная, геометрический смысл. Исследование функций
5. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной
6. Функции нескольких переменных. Приложения интеграла к решению прикладных задач. Частные производные
7. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
8. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Общие и частные решения.
9. Формулы прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона.
10. Определение комплексных чисел.
11. Основные формы комплексных чисел.
12. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
13. Формула корней квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.
14. Действия над комплексными числами, представленными в различных формах.
15. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно.
16. Производная функции, ее геометрический и физический смысл.
17. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной.
18. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
19. Линейные однородные уравнения первого порядка.
20. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
21. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Вопросы для проверки уровня обученности «УМЕТЬ»

1. Применять математические методы для решения профессиональных задач
2. Решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел
3. Определять максимум мощности в цепи постоянного тока с применением производной
5. Вычислять простейшие определенные интегралы
6. Вычислять площади и объемы при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла
7. Выполнять действия над комплексными числами, представленными в разных формах
8. Находить производную функции, вычислять интегралы методом непосредственного интегрирования и методом замены
9.Решать обыкновенные дифференциальные уравнения

Дополнительные задания

Практическая работа №____

Тема «Линейные операции над матрицами»

Цель: сформировать умение выполнять основные операции над матрицами.

Теоретические сведения к практической работе

Определение.Матрицей размером n×m называется прямоугольная таблица, составленная из nm чисел и имеющая n строк и m столбцов. Числа α_{ij}, составляющие матрицу, называются элементами матрицы

$$A=(\alpha_{ij})=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрицу A^t называют ***транспонированной***по отношению к матрице*A,* если она получена из матрицы*A* заменой строк этой матрицы её столбцами, и, наоборот, столбцов строками.

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}.$$

Пример, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Определение. Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, размещенные над главной диагональю (под ней), равны нулю, т.е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$ - *верхняя треугольная матрица,*

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ *– нижняя треугольная матрица.*

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нуль-матрицей.*

Матрица-строка $A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, матрица-столбец $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$.

Операции над матрицами.

1) Пусть матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ одинаковой размерности. Суммой матриц A *и* B *называется матрица* $C_{m\times n}$ той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матрицы A *и* B.

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех i и j.

2) *Разностью матриц* $A_{m\times n}$ *и* $B_{m\times n}$ одинаковой размерности *называется матрица* $C_{m\times n}$ той же размерности, каждый элемент которой рамен разности соответствующих элементов матрицы A *и* B.

$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для всех i и j.

3) *Произведением матриц* A *на число* λ *называется матрица* C, каждый элемент которой равен $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

4) Матрицу A можно умножить на матрицу B ($A \cdot B = C$) лишь в то случае, когда число столбцов первой матрицы $A_{m\times n}$ равно число строк второй матрицы $B_{n\times l}$, т.е. $A_{m\times n} \cdot B_{n\times l} = C_{m\times l}$. При этом каждый элемент матрицы-произведения C определяется так:

$$c_{ij} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

, для всех i и j.

Т.е., элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Найти произведение матрицы-строки и матрицы-столбца:

Пример 1.

1) $\begin{pmatrix}5 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=5\cdot 2+(-3)\cdot 4=10-12=-2$,

2) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}=1\cdot 4+(-1)\cdot 3+3\cdot(-2)=4-3-6=-5$,

3) $\begin{pmatrix}-4 & 1 & -8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix}=(-4)\cdot 2+1\cdot(-5)+(-8)\cdot 0=-8-5=-13$,

4) $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\0\\5\end{pmatrix}=(-2)\cdot 3+0\cdot(-4)+5\cdot 0+1\cdot 5=-6+5=-1$,

5) $\begin{pmatrix}7 & -1 & 0 & 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\8\\-4\\-2\end{pmatrix}=7\cdot 0+(-1)\cdot 2+0\cdot 8+2\cdot(-4)+(-3)\cdot(-2)=-2-8+6=-4$.

Пример 2

Для заданных матриц A, B, C найти матрицы $3A+2B$, C^T, AB, BA, C^TB, $AB+E$, $BA-4C$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\-1 & -1 & 3\\1 & -2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\3 & -1 & 1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad \tilde{N}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\3 & -1 & 2\\-2 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Решение

1.1) $3A+2B=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\-1 & -1 & 3\\1 & -2 & 5\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\3 & -1 & 1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9 & -12\\-3 & -3 & 9\\3 & -6 & 15\end{pmatrix}+$

$+\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\6 & -2 & 2\\2 & 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+2 & 9+0 & -12+6\\-3+6 & -3-2 & 9+2\\3+2 & -6+4 & 15+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 9 & -6\\3 & -5 & 11\\5 & -2 & 15\end{pmatrix}$;

1.2) $$C^T=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&-1&2\\-2&0&-3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-1&-1&0\\0&2&-3\end{pmatrix};$$

1.3) $$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&-2&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot2+3\cdot(-1)+(-4)\cdot1&2\cdot3+3\cdot(-1)+(-4)\cdot(-2)&2\cdot(-4)+3\cdot3+(-4)\cdot5\\(-1)\cdot2+(-1)\cdot(-1)+3\cdot1&(-1)\cdot3+(-1)\cdot(-1)+3\cdot(-2)&(-1)\cdot(-4)+(-1)\cdot3+3\cdot5\\1\cdot2+(-2)\cdot(-1)+5\cdot1&1\cdot3+(-2)\cdot(-1)+5\cdot(-2)&1\cdot(-4)+(-2)\cdot3+5\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4-3-4&6-3+8&-8+9-20\\-2+1+3&-3+1-6&4-3+15\\2+2+5&3+2-10&-4-6+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&11&-19\\2&-8&16\\9&-5&15\end{pmatrix};$$

1.4) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\3&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot3+(-4)\cdot1&2\cdot0+3\cdot(-1)+(-4)\cdot2&2\cdot3+3\cdot1+(-4)\cdot0\\(-1)\cdot1+(-1)\cdot3+3\cdot1&(-1)\cdot0+(-1)\cdot(-1)+3\cdot2&(-1)\cdot3+(-1)\cdot1+3\cdot0\\1\cdot1+(-2)\cdot3+5\cdot1&1\cdot0+(-2)\cdot(-1)+5\cdot2&1\cdot3+(-2)\cdot1+5\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+9-4&-3-8&6+3\\-1-3+3&1+6&-3-1\\1-6+5&2+10&3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-11&9\\-1&7&-4\\0&12&1\end{pmatrix};$$

1.5) $$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&-2&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot(-1)+3\cdot1&1\cdot3+0\cdot(-1)+3\cdot(-2)&1\cdot(-4)+0\cdot3+3\cdot5\\3\cdot2+(-1)\cdot(-1)+1\cdot1&3\cdot3+(-1)\cdot(-1)+1\cdot(-2)&3\cdot(-4)+(-1)\cdot3+1\cdot5\\1\cdot2+2\cdot(-1)+0\cdot1&1\cdot3+2\cdot(-1)+0\cdot(-2)&1\cdot(-4)+2\cdot3+0\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+3&3-6&-4+15\\6+1+1&9+1-2&-12-3+5\\2-2&3-2&-4+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3&11\\8&8&-10\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Подчеркнемещераз, что $AB\neq BA$.

1.6) $$C^T\cdot B=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-1&-1&0\\0&2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\3&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot3+(-2)\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot(-1)+(-2)\cdot2 & 1\cdot3+3\cdot1+(-2)\cdot0 \\ (-1)\cdot1+(-1)\cdot3+0\cdot1 & (-1)\cdot0+(-1)\cdot(-1)+0\cdot2 & (-1)\cdot3+(-1)\cdot1+0\cdot0 \\ 0\cdot1+2\cdot3-3\cdot1 & 0\cdot0+2\cdot(-1)-3\cdot2 & 0\cdot3+2\cdot1-3\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+9-2 & -3-4 & 3+3 \\ -1-3 & 1 & -3-1 \\ 6-3 & -2-6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 6 \\ -4 & 1 & -4 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix};$$

Задание 1.Заданы матрицы A, B и C, выполните действия

1. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\hat{A} \cdot \hat{A} + \tilde{N}$	2. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} \cdot \hat{A} - \tilde{N}$
3. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\hat{A} \cdot \tilde{N} + \hat{A}$	4. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\hat{A} \cdot \tilde{N} - \hat{A}$
5. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = (1 \quad 3 \quad 2)$, $\hat{A} \cdot \tilde{N} + \hat{A}$	6. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = (4 \quad 2 \quad 3)$, $\hat{A} \cdot \tilde{N} - \hat{A}$
7. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = (1 \quad 3 \quad 4)$, $\hat{A} \cdot \tilde{N} + \hat{A}$	8. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = (3 \quad 2 \quad 4)$, $\hat{A} \cdot \tilde{N} - \hat{A}$
9. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\hat{A} \cdot \tilde{N} + \hat{A}$	10. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\hat{A} \cdot \tilde{N} - \hat{A}$

Задание 2. Найти матрицу A^{-1}, если

$$1.\grave{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\ 2.\grave{A}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\ 3.\grave{A}=\begin{pmatrix}1&-2&4\\4&3&1\\1&4&1\end{pmatrix}\ 4.\grave{A}=\begin{pmatrix}5&-2&0\\1&2&7\\1&-1&1\end{pmatrix}\ 5.\grave{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&5&1\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$6.\grave{A}=\begin{pmatrix}5&-2&0\\2&0&1\\-6&1&1\end{pmatrix}\ 7.\grave{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\1&-5&1\\1&2&0\end{pmatrix}\ 8.\grave{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&4&1\\3&2&1\end{pmatrix}\ 9.\grave{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&2&2\\1&0&-3\end{pmatrix}$$

$$10.\grave{A}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\1&2&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

Задание 3. Для матриц A, B, C вычислить:

1) $5A-2B+3C$, **2)** $2A^T-3C^T+B^T$,

3) $AB-BA$, **4)** A^2-B^2, если

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\-2&0&-1\\1&0&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-4&3\\-1&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&-2&2\\1&-5&5\\3&1&-1\end{pmatrix}.$$

Задание 4.Найти произведение матриц:

1) $\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&4\\3&1\end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&6\\-3&2\end{pmatrix}$; **4)** $\begin{pmatrix}5&4\\2&5\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&5\\3&4\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$; **6)** $\begin{pmatrix}1&2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&-1&3\\2&6&0\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4 & 4\\ -3 & -5 & -4\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$; **8)** $\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Контрольные вопросы:

1. Что называют определителем квадратной матрицы?
2. Что называют определителем второго порядка?
3. Что называют определителем третьего порядка?
4. Чему равен определитель матрицы любого размера?
5. Что такое обратная матрица?
6. Какую матрицу называют вырожденной?
7. Какую матрицу называют единичной?
8. Что называют определителем квадратной матрицы?
9. Как найти матрицу, обратную данной?
10. В чем состоит операция транспонирования матрицы?
11. Как умножить матрицу на число?
12. Что называют рангом матрицы?
13. Как определить ранг матрицы?

Задания контрольной работы

Вариант 1

1. Найти $A+B$, если:

$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\ 3 & 0 & -7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

2. Найти произведение матриц:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 3 & 8 & 1\\ -5 & 0 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 0 & -2 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$;

3. Транспонировать матрицу:

а) $A=\begin{pmatrix}5 & 8\\ -6 & 7\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}7 & 8 & 1\\ 2 & 28 & -5\end{pmatrix}$;

4. Вычислить определитель:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Вариант 2

1. Найти $A+B$, если:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -4 \\ 5 & 0 & 12 \end{pmatrix}$;

2. Найти произведение матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

3. Транспонировать матрицу:

а) $A = \begin{pmatrix} 17 & 5 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 15 & -47 \\ 9 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

4. Вычислить определитель:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

Решения систем линейных уравнений по правилу Крамера.

Цель работы: формировать навыки решения систем уравнений методом Крамера

Требования к выполнению практической работы: Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретическая справка.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Крамера: $\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 5x - y + z = 12 \end{cases}$.

Найдем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 15 - 10 + 2 - 9 = -1$.

Так как $\Delta = -1 \neq 0$, система имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 10 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-1} = 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 0 & 38 \\ 13 & 0 & 29 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 17 & 38 \\ 13 & 29 \end{vmatrix} = 17 \cdot 29 - 13 \cdot 38 = 493 - 494 = -1 \Rightarrow z =$$

Ответ: $x = 2, y = -1, z = 1$.

№ варианта	Задание 1.	Задание 2.	Задание 3.	Задание 4.
1	$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$

Образец выполнения контрольной работы по теме: «Комплексные числа»

1. Составить квадратное уравнение по его корням $x_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$ и $x_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$.

Решение. По теореме Виета произведение корней приведённого квадратного уравнения равно свободному члену уравнения, а сумма корней – второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, поэтому имеем

$x_1 x_2 = (1 - \sqrt{3}\, i\,)(1 + \sqrt{3}\, i\,) = 1 + 3 = 4,$

$x_1 + x_2 = (1 - \sqrt{3}\, i\,) + (1 + \sqrt{3}\, i\,) = 1 - \sqrt{3}\, i + 1 + \sqrt{3}\, i = 2,$

$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 - 2x + 4 = 0.$

Ответ. $x^2 - 2x + 4 = 0.$

2. Найти действительные числа x и y из уравнения $5x - 2y + (x + y)\, i = 4 + 5i.$

Решение. Составим и решим систему $\begin{cases} 5x - 2y = 4, \\ x + y = 5, \end{cases} \begin{cases} 5x - 2y = 4, \\ 2x + 2y = 10, \end{cases} \begin{cases} 7x = 14, \\ x + y = 5, \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2, \\ 2 + y = 5, \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$

Ответ. (2; 3).

3. Выполнить действия а) $\dfrac{17 - 3i}{2 + i}$; б) $\dfrac{i^8 - 3i^{11}}{1 + 2i^{19}}$; в) $\dfrac{(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6}{12e^{-\frac{\pi}{2}i}}$.

Решение. а) $\dfrac{17 - 3i}{2 + i} = \dfrac{(17 - 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \dfrac{34 - 17i - 6i + 3i^2}{4 + 1} = \dfrac{31 - 23i}{5} = \dfrac{31}{5} - \dfrac{23}{5} i.$

б) $\dfrac{i^8 - 3i^{11}}{1 + 2i^{19}} = \dfrac{1 - 3(-i)}{1 + 2(-i)} = \dfrac{1 + 3i}{1 - 2i} = \dfrac{(1 + 3i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \dfrac{1 + 5i + 6i^2}{1 + 4} = \dfrac{1 + 5i - 6}{5} = \dfrac{-5 + 5i}{5} = -1 + i.$

$i^2 = -1, \quad i^4 = -1 \cdot (-1) = 1, \quad i^8 = 1, \quad i = \sqrt{-1}, \quad i^3 = -\sqrt{-1} = -i, \quad i^5 = \sqrt{-1} = i, \quad i^7 = -\sqrt{-1} = -i, \quad i^9 = \sqrt{-1} = i.$

Таким образом, $i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i,$

в) $\dfrac{(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6}{12e^{-\frac{\pi}{2}i}} = \dfrac{2^6\left(\cos 6\dfrac{\pi}{4} + i \sin 6\dfrac{\pi}{4}\right)}{12\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)} = \dfrac{32\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \sin\dfrac{3\pi}{2}\right)}{12(+i(-1))} = \dfrac{32(-i)}{12(-i)} = \dfrac{8}{3} = 2\dfrac{2}{3}.$

где $r = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2, \quad \varphi = arctg\dfrac{y}{x} = arctg\dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$

Ответ. а) $\dfrac{31}{5} - \dfrac{23}{5} i$; б) $-1 + i$; в) $2\dfrac{2}{3}$.

4. Выполнить действия и результат записать в тригонометрической форме $\dfrac{(1 + i)^8}{(1 - i)^6}$

Решение. $\dfrac{(1 + i)^8}{(1 - i)^6} = \dfrac{\sqrt{2}^8 (\cos(8 \cdot \dfrac{\pi}{4}) + i \sin(8 \cdot \dfrac{\pi}{4}))}{\sqrt{2}^6 (\cos(6 \cdot (-\dfrac{\pi}{4})) + i \sin(6 \cdot (-\dfrac{\pi}{4})))} = \dfrac{\sqrt{2}^2 (\cos\dfrac{\pi}{2} + i \sin\dfrac{\pi}{2})}{(\cos(-\dfrac{3\pi}{2}) + i \sin(-\dfrac{3\pi}{2}))} = \dfrac{2i}{i} = 2,$

где $r_1 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = arctg\dfrac{y}{x} = arctg\dfrac{1}{1} = arctg1 = \dfrac{\pi}{4},$

$r_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\varphi_2 = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{-1}{1} = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.
Таким образом, $z = 2$
Запишем данное число в тригонометрической форме:
$z = 2\ (\cos 0^\circ + i\cos 0\circ)$
Ответ. $z = 2\ (\cos 0^\circ + i\cos 0\circ)$

5. Выполнить действия и результат записать в показательной форме $7\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$.

Решение. $7\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 = 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 = 7\cdot 1^3.\left(\cos 3\frac{\pi}{6}+i\sin 3\frac{\pi}{6}\right) = 7\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$z = 7\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

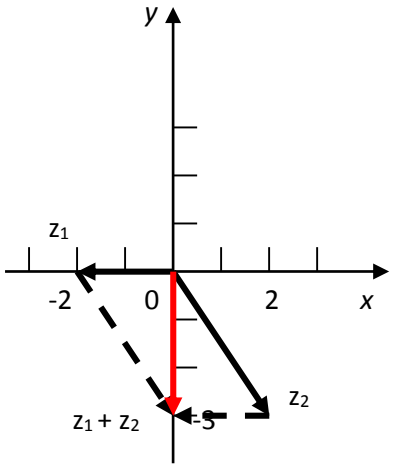
Ответ. $z = 7\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

6. Решить уравнение $x^2 + 8x + 80 = 0$.

Решение. $x^2 + 8x + 80 = 0$, $D = 64 - 4\cdot 1\cdot 80 = -256$, $x_1 = \frac{-8-\sqrt{-256}}{2} = -4-8i$, $x_2 = -4+8i$.

Ответ. $x_1 = -4-8i$, $x_2 = -4+8i$.

7. Построить слагаемые $z_1 = -2$ и $z_2 = 2 - 3i$ и их сумму.



Проверка: $z_1 + z_2 = (-2) + (2 - 3i) = -2 + 2 - 3i = -5i$.

Ответ. $-5i$.

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 1

1. Составить квадратное уравнение по его корням

$x_1 = 5 - 3i$ и $x_2 = 5 + 3i$.

2.Выполнить действия: а) $(2 + i) + (-3 - i) - (4 - 3i)$; б) $\dfrac{5+3i}{5-3i}$

3. Дать геометрическую интерпретацию комплексных чисел

$z_1 = -2 + i$; $z_2 = 2 - 3i$ и их суммы.

4. Выполнить действия: а) $(\cos 12° + i \sin 12°)^{45}$; б) $\left(2^{-\frac{15\pi}{8}}\right)^8$.

5.Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$z = \frac{1-i}{e^{\frac{3\pi}{4}i}}$$

Вариант 2

1. Решить квадратное уравнение $x^2 - 6x + 34 = 0$.

2.Выполнить действия: $(3 + 5i)(3 - 5i)(-2 + i)$.

3.Построить комплексные числа $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = 1 + 2i$ в комплексной плоскости, а также им сопряженные и противоположные.

4.Выполнить действия: а) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{e^{-\frac{\pi}{3}i}}$; б) $\left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^{-6}$.

5.Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $\dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^3}$; б) $\dfrac{-2i}{e^{\frac{\pi}{2}i}}$.

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 3

1. Построить комплексные числа $z_1 = -1 + 2i$ и $z_2 = 4i$, в комплексной

плоскости, а также им сопряженные и противоположные.

2. Решить квадратное уравнение $2x^2 + 2x + 5 = 0$.

3. Перевести в показательную форму:

а) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2i}$; б) $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

4. Выполнить действия: а) $\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{(-\sqrt{3}+i)^3}$; б) $\frac{(1+i)^4}{e^{-\frac{\pi}{2}i}}$.

5. Записать комплексное число $\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Вариант 4

1. Найти действительные числа x и y из уравнения $x - 8i + (y - 3)i = 1$.

2. Построить слагаемые $z_1 = -2 - 4i$ и $z_2 = 3$ и их сумму.

3. Перевести в алгебраическую форму: а) $2e^{-\frac{\pi}{2}i}$; б) $4\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$.

4. Выполнить действия: а) $\frac{12e^{\frac{\pi}{2}i}}{(1+i)^2}$; б) $z = (3 - \sqrt{3}i)^6 e^{\frac{\pi}{2}i}$.

5. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

$$\frac{\sqrt{3} - i^{17}}{i^{12}};$$

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 5

1. Построить комплексные числа $z_1 = -6$ и $z_2 = 4 - 3i$, а также им сопряженные и противоположные.

2. Перевести в тригонометрическую форму:

а) $z_1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$; б) $z_2 = 3e^{\frac{\pi}{4}i}$

3. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2$$

4. Выполнить действия: а) $z = \frac{(1+i)^2}{2e^{\frac{\pi}{4}i}}$; б) $z = (-2-2i)^4 \, e^{\frac{\pi}{4}i}$.

5. Доказать тождество $\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}$.

Вариант 6

1. Построить комплексные числа $z_1 = -2 - 3i$ и $z_2 = -4$, а также им сопряженные и противоположные.

2. Перевести в показательную форму: а) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4i}$; б) $3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

3. Найти действительные числа x и y из уравнения

$$(3 + i)\,x - 2(1+4i)\,y = -3 - 4i\,.$$

4. Выполнить действия: а) $\frac{1+i}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}$; б) $\frac{ie^{\frac{\pi}{3}i}}{(\sqrt{3}-i)^4}$.

5. Решить квадратное уравнение $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 7

1. Дать геометрическую интерпретацию комплексных чисел

$$z_1 = -3 - i,\ z_2 = 1 - 4i$$

и их суммы.

2. Перевести в алгебраическую форму: а) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$; б) $4e^{-\frac{5\pi}{6}i}$.

3. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

4. Выполнить действия: а) $(\sqrt{3}-i)^3 e^{-\frac{\pi}{3}i}$; б) $\frac{(1+i)^4}{e^{-\frac{\pi}{2}i}}$.

5. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел

$$x(2 + i) – y(1 – i) = 1 + 3i$$

Вариант 8

1.Построить слагаемые $z_1 = 2 - i$; $z_2 = 3 + 4i$ и их сумму.

2. Найти действительные числа x и y из уравнения

$$(2x + y) + (x + 3y)i = 3 - i.$$

3. Решить уравнение $x^2 - 10x + 41 = 0$.

4. Перевести в алгебраическую форму: а) $4e^{-\frac{5\pi}{6}i}$; б) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^3}$; б) $\frac{-2i}{e^{\frac{\pi}{2}i}}$.

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 9

1. Построить комплексные числа $z_1 = -2 + 4i$; $z_2 = 3$, а также им сопряженные и противоположные.

2. Комплексные числа $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$ представить в показательной форме.

3. Выполнить действия: а) $(\sqrt{3} - i)^3 e^{-\frac{\pi}{3}i}$; б) $\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}}{(1+\sqrt{3}i)^2}$.

4. Решить уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$.

5. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

$$\frac{(1-i)^2}{(1+i)^4}.$$

Вариант 10

1. Составить квадратное уравнение по его корням

$x_1 = \frac{1-3i}{2}$ и $x_2 = \frac{1+3i}{2}$.

2. Выполнить действия: а) $(3 - i)(3 + 4i)$; б) $\frac{3-i}{4+5i}$.

3. Дать геометрическую интерпретацию комплексных чисел

$z_1 = -2 + 5i$; $z_2 = -5 - 3i$ и их суммы.

4. Выполнить действия: а) $5(\cos 10° + i \sin 10°) \cdot 2(\cos 80° + i \sin 80°)$;

б) $\frac{18e^{\frac{\pi}{2}i}}{(1-\sqrt{3}i)^2}$.

5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$z = \frac{1-i}{e^{\frac{3\pi}{4}i}}$$

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 11

1. Решить квадратное уравнение $x^2 - 7x + 15 = 0$.

2.Выполнить действия: $\frac{(1+i)^8-1}{(1-i)^8+1}$.

3.Построить комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = -1 + 7i$ в комплексной плоскости, а также им сопряженные и противоположные.

4.Выполнить действия: а) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{e^{-\frac{\pi}{3}i}}$; б) $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-6}$.

5.Найти действительные числа x и y из уравнения
$(x - 5y) + (x - 2y)i = -17 - 8i.$

Вариант 12

1. Построить комплексные числа $z_1 = -4 + 2i$ и $z_2 = 2i$, в комплексной плоскости, а также им сопряженные и противоположные.

2. Решить квадратное уравнение $2x^2 + 10x + 17 = 0.$

3. Перевести в показательную форму:
а) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2i}$; б) $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

4. Выполнить действия: а) $\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{(-\sqrt{3}+i)^3}$; б) $\frac{(1+i)^4}{e^{-\frac{\pi}{2}i}}$.

5. Вычислить $\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot 7\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 13

1. Найти действительные числа x и y из уравнения
$2x - 5yi - x + 3yi = 1 - 2i.$

2. Построить слагаемые $z_1 = -2$ и $z_2 = 3 - 4i$ и их сумму.

3. Перевести в алгебраическую форму: а) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$; б) $4\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$.

4. Выполнить действия: а) $\frac{12e^{\frac{\pi}{2}i}}{(1+i)^2}$; б) $z = (-2-2i)^4\ e^{\frac{\pi}{4}i}$.

5. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

$$\frac{\sqrt{3}-i^{17}}{i^{12}};$$

Вариант 14

1. Построить комплексные числа $z_1 = -6i$ и $z_2 = -4-3i$, а также им сопряженные и противоположные.

2. Перевести в тригонометрическую форму:

а) $z_1 = -2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$; б) $z_2 = 3e^{-\frac{\pi}{4}i}$

3. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2.$$

4. Выполнить действия: а) $z = \frac{(1-i)^2}{2e^{-\frac{\pi}{4}i}}$; б) $z = (3-\sqrt{3}i)^6\ e^{\frac{\pi}{2}i}$.

5. Вычислить $\frac{5(\cos 109^\circ + i\sin 109^\circ)}{3(\cos 49^\circ + i\sin 49^\circ)}$.

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 15

1. Построить комплексные числа $z_1 = -2-3i$ и $z_2 = 4i$, а также им

сопряженные и противоположные.

2. Перевести в показательную форму:

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2i}$; б) $3\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

3. Найти действительные числа x и y из уравнения

$$(1+2i)\,x-(5-3i)\,y=\frac{1}{2}-\frac{8i}{5}.$$

4. Выполнить действия: а) $\frac{1+i}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}$; б) $\frac{ie^{-\frac{\pi}{3}i}}{(\sqrt{3}-i)^4}$.

5. Решить квадратное уравнение $x^2-2x+5=0$.

Вариант 16

1. Дать геометрическую интерпретацию комплексных чисел $z_1=-3-i,\quad z_2=1-4i$ и их суммы.

2. Перевести в алгебраическую форму: а) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; б) $4e^{-\frac{5\pi}{6}i}$.

3. Решить уравнение $13x^2-2x+2=0$.

4. Выполнить действия: а) $(\sqrt{3}-i)^3e^{-\frac{\pi}{3}i}$; б) $\frac{(1+i)^4}{e^{-\frac{\pi}{2}i}}$.

5. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел

$$x(2+i)-y(1-i)=1+3i$$

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 17

1.Построить слагаемые $z_1=2-i;\quad z_2=3+4i$ и их сумму.

2. Найти действительные числа x и y из уравнения

$$(2x + y) + (x + 3y)i = 3 - i\,.$$

3. Решить уравнение $x^2 - 6x + 25 = 0.$

4. Перевести в алгебраическую форму:

а) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; б) $2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

5. Извлечь корень из комплексного числа $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$.

Вариант 18

1. Построить вычитаемое $z_1 = -3 - 2i$; уменьшаемое $z_2 = 2 - 6i$ и их разность.

2. Перевести в алгебраическую форму:

а) $4e^{-\frac{5\pi}{6}i}$; б) $2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

3. Выполнить действия: а) $(\sqrt{3} - i)^3 e^{\frac{\pi}{3}i}$; б) $\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}}{(1-\sqrt{3}i)^2}$.

4. Решить уравнение $x^2 - 14x + 45 = 0.$

5. Составить квадратное уравнение по его корням $x_1 = 3 - i$ и $x_2 = 3 + i.$

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 19

1. Построить уменьшаемое $z_1 = 4 - i$, вычитаемое $z_2 = -2 - 2i$ и их разность

2. Решить квадратное уравнение $2x^2 + 2x + 13 = 0.$

3. Перевести в показательную форму:

а) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2i}$; б) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

4. Выполнить действия: а) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{(1-i)^4 i^4}$; б) $(-2-2i)^4\, e^{\frac{\pi}{4}i}$.

.

5. Вычислить $2\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$.

Вариант 20

1. Найти действительные числа x и y из уравнения

$$2x - 5yi - x + 3yi = 1 - 2i.$$

2. Построить слагаемые $z_1 = -2$ и $z_2 = 3 - 4i$ и их сумму.

3. Перевести в алгебраическую форму: а) $3e^{-\frac{\pi}{3}i}$; б) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

4. Выполнить действия: а) $\frac{12e^{-\frac{\pi}{2}i}}{(1+i)^2}$; б) $\frac{2i}{(2+e^{\frac{\pi}{4}i})^4}$.

5. Составить квадратное уравнение по его корням:

$x_1 = \frac{1}{5}(2-3i)$; $x_2 = \frac{1}{5}(2+3i)$;